

# 循环卷积在正交频分复用通信系统中的应用

戚晨皓, 王 昕, 吴镇扬

(东南大学 信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096)

**摘要:** 循环卷积可通过离散傅里叶变换快速实现, 因此具有很高的实际应用价值。本文结合最新的第四代移动通信系统中已成功应用的正交频分复用技术, 介绍循环卷积在正交频分复用中的应用, 并结合具体实例, 使学生能更深刻的理解和掌握循环卷积。既丰富了教学内容, 又开阔了学生的知识面, 使教学与科研充分结合。

**关键词:** 循环卷积; 正交频分复用; 循环前缀

中图分类号: G642

文献标识码: A

文章编号: 1008-0686(2016)05-0077-04

## Application of Circular Convolution in Orthogonal Frequency Division Multiplexing Communication System

QI Chen-hao, WANG Xin, WU Zhen-yang

(School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

**Abstract:** The circular convolution can be fast achieved by the discrete Fourier transform (DFT), so it is practical for various applications. This paper introduces the application of circular convolution in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) system which has already been successfully applied in the latest fourth generation mobile communication systems. Provided specific examples, students can deeply understand the circular convolution. The content of this paper fully integrates teaching and scientific research, not only enriching the teaching content, but also widening the horizon of students.

**Keywords:** circular convolution; orthogonal frequency division multiplexing; cyclic prefix

### 0 引言

“数字信号处理”是电子信息类专业重要的主干课程之一, 具有理论性强、概念抽象等特点<sup>[1]</sup>。循环卷积运算在“数字信号处理”课程中具有举足轻重的地位。在满足等价条件的情况下, 循环卷积可用于求解线性卷积, 特别是循环卷积还可通过离散傅里叶变换 DFT (Discrete Fourier Transform) 及其快速实现——快速傅里叶变换 FFT (Fast Fourier Transform) 求解, 利用循环卷积能有效简化线性卷积

的计算, 因此它具有很高的实际应用价值, 是课程教学的重点内容之一。

现有的“数字信号处理”课程及教材中对循环卷积的应用涉及较少, 学生对循环卷积的理解不够深入<sup>[2-3]</sup>。为使学生更深刻地理解和掌握循环卷积, 同时开阔学生的知识面, 让学生了解相关的科研进展, 本文结合最新的第四代移动通信系统中已成功应用的正交频分复用 OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 技术, 介绍循环卷积在正交频分复用中的应用。

收稿日期: 2016-12-08; 修回日期: 2016-12-15 基金项目: 东南大学教学改革项目、国家自然科学基金 (61302097), 江苏省自然科学基金 (BK20161428), 江苏高校品牌专业建设工程资助项目 (PPZY2015 A035)

第一作者: 戚晨皓 (1981-), 男, 博士, 副教授, 主要从事数字信号处理、无线通信与信号处理的教学与科研工作, E-mail: qch@seu.edu.cn

本文首先介绍 OFDM 系统框架,讨论保护间隔长度的选取对符号间干扰的影响。其次,为消除多径造成的符号间干扰,可在保护间隔内填充循环前缀,将每个 OFDM 符号的后面部分复制到该 OFDM 符号的头部形成循环结构,将线性卷积转换成循环卷积,并通过 FFT 快速计算。最后给出了一个 Matlab 实例,通过仿真,更加形象地演示了整个过程。

### 1 线性卷积与循环卷积的等价条件

设  $x(n)$  和  $y(n)$  均为有限长序列,长度分别为  $N_1$  和  $N_2$ ,则两者的线性卷积表示为<sup>[4]</sup>

$$z_l(n) = x(n) * y(n) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x(m)y(n-m) \quad (1)$$

$z_l$  的长度为  $N_1 + N_2 - 1$ 。

设循环卷积的长度  $M \geq \max\{N_1, N_2\}$ ,则循环卷积表示为

$$z_c(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{m=0}^{M-1} x(m)y[(n-m)]_M R_M(n) \quad (2)$$

其中  $y[(n)]_M$  表示  $y(n)$  的周期延拓,周期为  $M$ ;  $R_M(n)$  表示长度为  $M$  的矩形序列。

循环卷积的计算过程包括:首先对  $y(m)$  作周期延拓并围绕纵轴折叠,得  $y[(n-m)]_M$ ;随后右移  $n$  位得到  $y[(n-m)]_M$ ;之后将  $x(m)$  和  $y[(n-m)]_M R_M(n)$  在  $0 \leq m \leq M-1$  的主值区间内对应项相乘并逐项相加得到  $z_c(n)$ ,该循环卷积过程记为  $x(n) \otimes y(n)$ 。

循环卷积可用 DFT 实现,即

$$z_c(n) = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{x(n)\}\text{DFT}\{y(n)\}\} \quad (3)$$

一共包含 3 次  $M$  点的 DFT 运算,当采用 DFT 快速实现时,能显著降低计算复杂度。

当满足  $M \geq N_1 + N_2 - 1$ ,循环卷积  $z_c(n)$  等价于线性卷积  $z_l(n)$ <sup>[5]</sup>。因此,线性卷积也可通过 FFT 快速实现,具有较高的实际应用价值,而现有的“数字信号处理”课程所用到的教材对循环卷积的实际应用部分内容涉及较少。

### 2 OFDM 系统

目前已经商用的第四代移动通信系统不论 TD-LTE 还是 FDD LTE 均基于 OFDM 技术。OFDM 的基本原理是将高速的数据流通过串并转换,分配到传输速率相对较低的若干子信道中进行传输。由于

每个子信道中的符号周期会相对增加,因此可将频率选择性衰落信道转换为若干平坦衰落信道,减轻无线信道多径时延扩展所产生的时间弥散对系统的影响,所以在现代通信系统中受到广泛应用<sup>[6]</sup>。

OFDM 系统框图如图 1 所示,发送端主要包括串并转换、IFFT、并串转换、插入保护间隔和上变频等操作;接收端主要包括下变频、去除保护间隔、串并转换、FFT 和并串转换等操作。

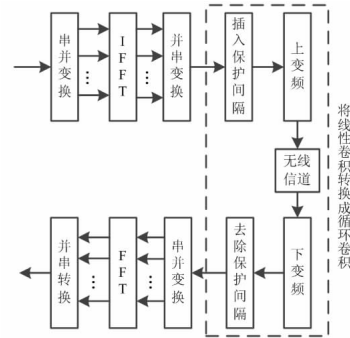


图 1 OFDM 系统框图

### 3 保护间隔

在 OFDM 系统里,为了降低符号间干扰,通常需要在每个 OFDM 符号之间加入保护间隔。由于无线信道的多径传输效应,接收端将收到同一发送信号的不同延时样本的叠加信号,造成符号间干扰;而保护间隔能有效隔离不同的 OFDM 符号,避免符号间干扰。

#### 3.1 保护间隔长度的选取

保护间隔长度的选取通常和信道的最大时延扩展有关。当保护间隔长度大于等于无线信道的最大时延扩展时,前一个 OFDM 符号的多径分量将不会对下一个 OFDM 符号造成干扰,能有效避免符号间干扰。

图 2 所示为已插入保护间隔的 OFDM 数据流  $s$ ,每个 OFDM 符号包含长度为  $N_u$  的有用数据部分和长度为  $N_G$  的保护间隔,因此每个 OFDM 符号长度为  $N = N_u + N_G$ 。

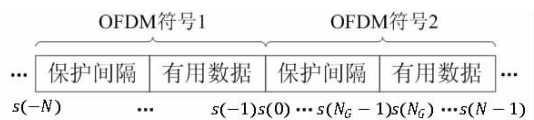


图 2 OFDM 符号结构示意图

假设多径信道的最大时延为  $L$ ,则发送信号与接收信号之间的关系表示为

$$r = s^* h + n = Ah + n \quad (4)$$

其中  $h = [h(0) \ h(1) \ \dots \ h(L-1)]^T$  是长度为  $L$  的信道冲激响应列向量。为研究保护间隔的长度选取问题,假设发送的保护间隔表示为  $[s(0) \ s(1) \ \dots \ s(N_G - 1)]$ ,如图 2 所示,则接收的保护间隔部分可表示为  $y = [y(0) \ y(1) \ \dots \ y(N_G + L - 1)]^T$ ,  $n = [n(0) \ n(1) \ \dots \ n(N_G + L - 1)]^T$  是加性高斯白噪声向量,矩阵  $A$  表示为

$$A = \begin{bmatrix} s(0) & s(-1) & \dots & s(-L+1) \\ s(1) & s(0) & \dots & s(-L+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(L-2) & s(L-3) & \dots & s(-1) \\ s(L-1) & s(L-2) & \dots & s(0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(N_G-1) & s(N_G-2) & \dots & s(N_G-L) \\ s(N_G) & s(N_G-1) & \dots & s(N_G-L+1) \\ s(N_G+1) & s(N_G) & \dots & s(N_G-L+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s(N_G+L-1) & s(N_G+L-2) & \dots & s(N_G) \end{bmatrix}$$

数据部分

由于保护间隔之前的  $s(-1) \ s(-1) \ s(-N)$ ,为前一个 OFDM 符号,保护间隔之后的  $s(N_G) \ s(N_G + 1) \ \dots \ s(N - 1)$  为当前 OFDM 符号中的有用数据部分,注意到矩阵  $A$  右上角部分,以  $s(0)$  为边界,为前一个 OFDM 符号的部分内容;而左下角部分,以  $s(N_G - 1)$  为边界,为当前 OFDM 符号中有用数据的部分内容。因此,为了避免前一个 OFDM 符号对当前 OFDM 符号的有用数据部分造成干扰,矩阵  $A$  的右上角部分和矩阵  $A$  的左下角部分在  $A$  的任何一行都不能重叠,要求

$$N_G \geq L - 1 \quad (5)$$

实际上,长度为  $N_u$  的 OFDM 有用数据输入到长度为  $L$  的多径信道中,经过线性卷积后输出数据长度为  $N_u + L - 1$ 。输入序列由长度  $N_u$  弥散到  $N_u + L - 1$ ,长度扩展了  $L - 1$ ,所以保护间隔长度至少为  $L - 1$ 。

### 3.2 保护间隔的填充

OFDM 系统的保护间隔通常使用循环前缀填充,可有效避免由于多径传播造成的符号间干扰。特别是使用循环前缀以后,能将线性卷积转化为循环卷积,而循环卷积可通过 DFT 快速计算。

OFDM 发送端首先通过串并转换将输入连续的数据流转换为若干个并行的数据向量,实现了将高码率数据流转换为若干低码率的子数据流;其次,每个数据向量通过 IFFT 得到每个 OFDM 符号的有用

数据部分,通过并串转换以后得到  $s_u$ ,在  $s_u$  头部增加长度为  $N_G$  ( $N_G \geq L - 1$ ) 的循环前缀部分  $s_{cp}$

$$s_{cp} = [s(U_u - N_G) \ \dots \ s(N_u - 1)] \quad (6)$$

之后将完整的 OFDM 符号  $s = [s_{cp} \ s_u]$  发送进入无线信道,OFDM 接收端对接收信号  $r$  首先去除循环前缀得到  $r_u$

$$r_u = [r(N_G) \ r(N_G + 1) \ \dots \ r(N - 1)] \quad (7)$$

再依次进行串并转换、FFT、并串转换以后,提取出发送信号。

不难发现  $r_u$  是  $s_u$  与  $h$  的  $N_u$  点循环卷积与信道加性高斯白噪声之和,即

$$r_u = s_u \otimes h + \eta \quad (8)$$

其中  $\eta$  为长度  $N_u$  的加性高斯白噪声。进而具有如下关系:

$$\text{DFT}\{r_u\} = \text{DFT}\{s_u\} \cdot \text{DFT}\{h\} + \text{DFT}\{\eta\} \quad (9)$$

当通过 OFDM 信道估计获得  $\hat{h}$  以后,利用

$$\hat{s}_u = \text{IDFT}\left\{\frac{\text{DFT}\{r_u\}}{\text{DFT}\{\hat{h}\}}\right\} \quad (10)$$

其中,两个序列的 DFT 的除法表示序列逐点相除。考虑到通常  $L < N_u$ ,在计算  $\text{DFT}\{\hat{h}\}$  时,通常将  $\hat{h}$  补零到长度为  $N_u$  再进行 DFT。因此,通过式(10)可快速获得发送的 OFDM 符号有用部分的估计。

### 3.3 计算实例

无线通信信道  $h = [3 \ 2 \ 1]$ ,即信道长度  $L = 3$ ;设 OFDM 符号的有用数据部分  $s_u = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ ,长度  $N_u = 6$ ,根据式(5)可计算得到循环前缀的长度  $N_G \geq 2$ 。本例不妨取  $N_G = 2$ 。根据式(6)得到循环前缀  $s_{cp} = [5 \ 6]$  构成完整的 OFDM 符号  $s = [5 \ 6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6]$ 。发送信号通过无线信道的过程可使用 Matlab 库函数 filter 实现;信道噪声可通过库函数 awgn 实现。由于本例重点关注循环卷积,本例中忽略信道噪声。因此,

$$r = \text{filter}(h, 1, s) = [15 \ 28 \ 20 \ 14 \ 14 \ 20 \ 26 \ 32]$$

根据式(7)得到  $r_u = [20 \ 14 \ 14 \ 26 \ 32]$ 。其实  $r_u$  为发送的 OFDM 符号有用数据部分  $s_u$  与  $h$  的  $N_u$  点循环卷积,即  $r_u = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{s_u\} \text{DFT}\{h\}\}$ ,计算可得  $r_u = [20 \ 14 \ 14 \ 26 \ 32]$ 。

当循环前缀长度不满足式(5)时,例如  $N_G = 1$  时  $s_{cp} = [6]$   $s = [6 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 4 \ 5 \ 6]$   $r = [18 \ 15 \ 14 \ 14 \ 20 \ 26 \ 32]$   $r_u = [15 \ 14 \ 14 \ 20 \ 26 \ 32]$ 。但是  $s_u$  和  $h$  的  $N_u$  点循环卷积的结果为  $[20 \ 14 \ 14 \ 26 \ 32]$ 。

20, 26, 32] 和  $r_u$  不同, 说明发生了符号间干扰。由此验证了式(5)。

### 3 结语

本文介绍了循环卷积在 OFDM 系统中的应用, 首先研究了 OFDM 系统保护间隔长度的选取对符号间干扰的影响, 其次通过在保护间隔内填充循环前缀, 将线性卷积转换成循环卷积, 并利用 DFT 进行快速计算。最后通过一个实例, 对以上内容进行了演示。

本文使学生能更深刻的理解和掌握循环卷积。既丰富了教学内容, 又开阔了学生的知识面, 使教学与科研充分结合, 提高了学生的学习兴趣。

### 参考文献:

- [1] 江汉, 徐以涛, 沈良. 线性卷积与循环卷积的教学研究[J]. 南京: 电气电子教学学报, 2016, 38(4): 72-74.
- [2] 胡广书. 数字信号处理导论[M]. 第2版, 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [3] 吴镇扬. 数字信号处理[M]. 第3版, 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [4] 沈君凤, 刘延松. 循环卷积的快速算法研究[J]. 武汉: 湖北大学学报(自然科学版), 2014, 36(4): 313-316.
- [5] 赵鸿图, 刘艳辉. 循环卷积的时域与频域算法研究[J]. 北京: 计算机工程与设计, 2014, 35(5): 1678-1682.
- [6] 佟学俭, 罗涛. OFDM 移动通信技术原理与应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2003. 6.

