

线性卷积与循环卷积等价关系及水声通信应用

戚晨皓, 王 昕, 张在琛

(东南大学 信息科学与工程学院, 江苏 南京 210096)

摘要: 线性卷积与循环卷积的等价关系是“数字信号处理”课程的重点内容之一。在计算循环卷积时,通常利用线性卷积的周期延拓来计算周期卷积,再对周期卷积取主值区间得到循环卷积。本文结合水声通信这一海洋信号处理领域的研究热点之一,针对水声通信中最新使用的零填充正交频分复用系统,介绍基于线性卷积的循环卷积计算方法及其具体应用,并通过实例对该方法进行演示。

关键词: 首尾混叠相加法; 水声通信; 正交频分复用

中图分类号: G642

文献标识码: A

文章编号: 1008-0686(2017)06-0060-04

Equivalence of Linear Convolution and Circular Convolution and its Application in Underwater Acoustic Communications

QI Chen-hao, WANG Xin, Zhang Zai-chen

(School of Information Science and Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

Abstract: The equivalence of linear convolution and circular convolution is one of the most important parts in the course of Digital Signal Processing. To compute the circular convolution, we usually use periodic extension of linear convolution to calculate the cyclic convolution, and then extract the principal value interval from the cyclic convolution as the final result of circular convolution. The paper focuses on underwater acoustic communication that is one of the hot topics in oceanic signal processing. In particular, we address zero padding orthogonal frequency division multiplexing (ZP-OFDM) where the computation of the circular convolution based on linear convolution is recently applied. The examples for demonstration are also provided.

Keywords: end to end overlap adding method; underwater acoustic communications; orthogonal frequency division multiplexing

0 引言

在“数字信号处理”课程教学中,卷积运算占据重要地位。其中,线性卷积与循环卷积之间的关系是学习过程中的难点之一。循环卷积和周期卷积的过程是一致的,不同的是循环卷积仅取周期卷积的主值序列。而周期卷积又是线性卷积的周期延拓,因此,可通过周期卷积在循环卷积和线性卷积之间

建立联系^[1,2]。

在计算周期卷积时,需要对两个有限长序列的线性卷积的结果按照卷积周期进行延拓,当周期长度小于线性卷积结果的长度时,会发生混叠现象^[3]。在计算循环卷积时,通常利用线性卷积的周期延拓先计算周期卷积,再对周期卷积取主值区间得到循环卷积;该过程等价于将线性卷积结果的尾部加到头部并将尾部删除,其中相加的位数等于发

收稿日期: 2016-12-13; 修回日期: 2017-02-09

基金项目: 江苏高校品牌专业建设工程资助项目(PPZY2015A035)、东南大学教学改革项目、国家自然科学基金(61302097),江苏省自然科学基金(BK20161428)

第一作者: 戚晨皓(1981-),男,博士,副教授,主要从事数字信号处理、无线通信与信号处理的教学与科研工作, E-mail: qch@seu.edu.cn

生混叠的位数, 这样可直接得到循环卷积的结果。

通常, “数字信号处理”课程只介绍线性卷积与循环卷积的等价关系, 没有介绍其具体应用。由于线性卷积与循环卷积的等价关系具有一定难度, 为了激发学生的兴趣、加深学生对这一关系的认识, 结合具体应用加以讲授, 这不失为一种可行的教改探索。

本文介绍了线性卷积与循环卷积的等价关系在水声通信这一海洋信号处理领域的研究热点中的应用。由于水声信道时延很大, 采用循环前缀填充保护间隔的正交频分复用 OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) 技术会占用很大的发射功率, 因此, 在水声通信中常用补零 ZP (Zero Padding) 填充 OFDM 的保护间隔; 相应的, 在接收端需采用首尾混叠相加法消除符号间干扰 ISI (Inter-symbol Interference)。

本文首先简单回顾了“数字信号处理”课程中循环卷积、周期卷积与线性卷积之间的等价关系, 随后介绍了水声通信中的 ZP-OFDM 系统。为消除 ISI, 给出了保护间隔长度所需满足的条件以及在保护间隔内补零后接收端实施首尾混叠相加法的步骤。最后通过 Matlab 实例, 演示了首尾混叠相加法消除 ISI 的过程。

1 循环与线性卷积之间的等价关系

有限长序列 $x(n)$ 与 $y(n)$ 的长度分别为 N_1 、 N_2 , 取 $L \leq \max\{N_1, N_2\}$, 将 $x(n)$ 与 $y(n)$ 分别补零到 L 长度, 记作 $x_L(n)$ 和 $y_L(n)$, 再以 L 为周期构造两个周期序列为

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_L(n+rL) \quad (1)$$

$$\tilde{y}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_L(n+rL) \quad (2)$$

则周期卷积为

$$\begin{aligned} \tilde{f}(n) &= \sum_{m=0}^{L-1} \tilde{x}(m) \tilde{y}(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_L(m) \tilde{y}(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{L-1} x_L(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} y_L(n+rL-m) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_L(m) y_L(n+rL-m) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n+rL) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $f(n)$ 就是 $x_L(n)$ 和 $y_L(n)$ 的线性卷积, 长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 。可以看到, 当卷积周期 $L < N_1 + N_2 - 1$,

$f(n)$ 的周期延拓必然有 $N_1 + N_2 - 1 - L$ 点产生混叠。混叠后主值区间的值即等于 $f(n)$ 尾部 $N_1 + N_2 - 1 - L$ 点与首部 $N_1 + N_2 - 1 - L$ 点对应相加后, 去除 $f(n)$ 尾部 $N_1 + N_2 - 1 - L$ 点后的值, 此过程称为首尾混叠相加。因为周期卷积的主值区间等于循环卷积的值, 所以循环卷积的结果可以通过对线性卷积 $f(n)$ 进行首尾混叠相加得到。

需要注意的是, 本文的首尾混叠相加法与“数字信号处理”课程介绍的重叠相加法不同, 重叠相加法涉及到两个不同的分段之间的线性卷积输出的重叠相加, 而本文的首尾混叠相加法仅仅是在同一个分段内部将尾部重叠相加到头部, 并且把尾部删除。

2 水声通信中的 ZP-OFDM 系统

水声信道中, 发送信号经过水面、水底的多次反射和散射到达接收端, 密集的多径效应造成严重的频率选择性衰落, 导致信道具有很强的频率选择性^[5]。另一方面, 水声信道时变性强, 不同水域、不同温度、不同盐度都会导致水声信道传输特性不同, 远不如无线信道稳定。水声信道具有频率和时间双重选择性, 给高速可靠的水声通信带来巨大挑战。

由于声信号在水中的传播速度远小于无线电波在空气中的传播速度, 水声通信收发机较小的相对运动即会产生显著的多普勒频偏。

现有的单载波水声通信系统通常在接收端使用自适应判决反馈均衡器消除水声信道引起的 ISI, 由于水声信道时延扩展很大, 均衡器长度很长, 有时甚至高达上百上千个抽头, 复杂度很高。而 OFDM 多载波传输系统, 可将频率选择性信道有效转换成若干并行的频率平坦子信道, 大大降低了接收端均衡器的复杂度, 因此, 将 OFDM 技术应用到水声通信中是目前水声领域的研究热点之一。

考虑到水声信道时延扩展很大, 而 OFDM 保护间隔长度要不小于信道时延扩展, 采用循环前缀填充保护间隔的 OFDM 系统在循环前缀部分会占用很大的发射功率, 因此, 在水声通信中常用补零填充 OFDM 的保护间隔, 形成 ZP-OFDM 系统。该系统框图如图 1 所示, 发送端主要包括串并变换、IFFT、并串变换、尾部插入保护间隔、上变频等部分; 接收端主要包括下变频、首尾混叠相加法、尾部去除保护间隔、串并转换、FFT、并串转换等部分。

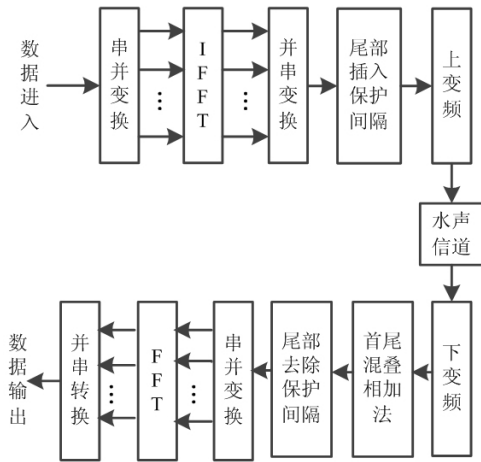


图 1 ZP-OFDM 系统框图

3 首尾混叠相加法在 ZP-OFDM 中的应用

在 OFDM 系统中,为消除 ISI,通常需要在每个 OFDM 符号间插入一定长度的保护间隔。假设每个 OFDM 符号由 N_u 个数据部分和 N_c 个保护间隔部分组成,满足

$$N_c \geq L - 1 \quad (4)$$

由于声信号在海水中的传播速度约为 1500 米/秒,远小于无线电波在空气的传播速度 3×10^8 米/秒,在相同传输距离下,水声信道中的时延要比无线信道中的时延大得多。如果采用传统的循环前缀填充保护间隔的方法,会占用很大的发射功率,所以在水声通信中,保护间隔通常使用零填充,即 ZP-OFDM。此外,填充零元素具有更强的鲁棒性。

OFDM 发送端首先通过串并转换将输入连续的数据流转换为若干个并行的长度为 N_u 的数据向量;其次,每个数据向量通过 IFFT 得到每个 OFDM 符号的数据部分,通过并串转换以后得到 s_u ,在 s_u 尾部增加长度为 N_c ($N_c \geq L - 1$) 的全零序列 s_{zp} ,之后将完整的 OFDM 符号 $s = [s_u, s_{zp}]$ 发送进入冲激响应为 h 为水声信道,信道长度为 L 。发送信号与接收信号之间的关系表示为

$$r = s^* h + n \quad (5)$$

其中, n 是加性噪声向量。

接收端采用首尾混叠相加进行 OFDM 信号解调。首尾混叠相加的本质是用线性卷积来计算循环卷积。

首尾混叠相加法的具体步骤如下:

首先保留接收信号 r 的前 N_u 个 OFDM 样点,其

次将尾部的 N_c 个 OFDM 样点对应加到头部的 N_c 个 OFDM 样点上,最终得到所需的 r_u ,即

$$r_u = [r(0) + r(N_u), r(1) + r(N_u + 1), \dots, r(N_c - 1) + r(N_u + N_c - 1), r(N_c), r(N_c + 1), \dots, r(N_u - 1)] \quad (6)$$

该过程如图 2 所示。得到所需的 r_u 后,再依次进行串并转换、FFT、并串转换以后,提取出发送数据。不难发现, r_u 是 s_u 与 h 的 N_u 点循环卷积与信道加性噪声之和,即

$$r_u = s_u h + \eta \quad (7)$$

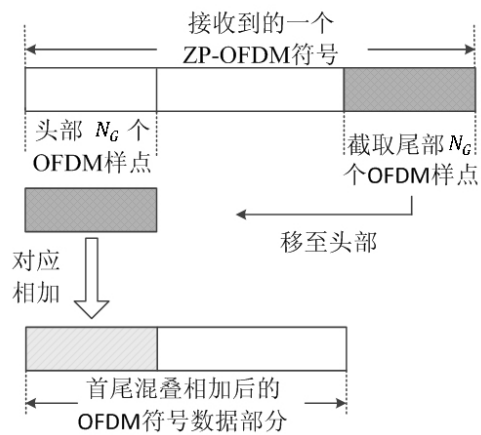


图 2 首尾混叠相加法示意图

其中, η 为长度 N_u 的加性噪声。进而具有如下关系

$$DFT\{r_u\} = DFT\{s_u\} \cdot DFT\{h\} + DFT\{\eta\} \quad (8)$$

其中, $DFT\{\cdot\}$ 表示 N_u 点的 DFT 运算。当通过 OFDM 信道估计获得真实信道 h 的估计 \hat{h} 以后,就可以计算 \hat{s}_u

$$\hat{s}_u = IDFT\left\{\frac{DFT(r_u)}{DFT(\hat{h})}\right\} \quad (9)$$

其中,两个序列的 DFT 的除法表示序列逐点相除,不难发现,式(9)本质上实现了解卷积功能。考虑到通常 $L < N_u$,在计算 $DFT\{\hat{h}\}$ 时,通常将 \hat{h} 补零到长度为 N_u 再进行 DFT。因此,通过式(9)可快速获得发送的 OFDM 符号数据部分的估计。

4 Matlab 实例

假设水声信道冲激响应序列为 h ,即水声信道长度 $L=3$;设 OFDM 符号的数据部分 $s_u = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$,长度 $N_u=6$ 。根据式(4)可计算得到 ZP 的

长度 $N_c \geq 2$ 。本例不妨取 $N_c = 2$, 尾部补零以后构成完整的 ZP-OFDM 符号 $\mathbf{s} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 0]$ 。发送信号通过水声信道的过程可使用 Matlab 库函数 filter 实现; 信道噪声可通过库函数 awgn 实现。由于本例重点关注首尾混叠相加法, 此处忽略信道噪声。因此, $\mathbf{r} = \text{filter}\{\mathbf{h}, 1, \mathbf{s}\} = [3, 8, 14, 20, 26, 32, 17, 6]$

filter 函数本质上实现了线性卷积, 在 \mathbf{s}_u 尾部补 2 个零的作用是使 filter 输出等价于 \mathbf{s}_u 与 \mathbf{h} 的线性卷积输出。根据式(6)得到 $\mathbf{r}_u = [20, 14, 14, 20, 26, 32]$ 。其实, \mathbf{r}_u 为发送的 OFDM 符号数据部分 \mathbf{s}_u 与 \mathbf{h} 的 N_u 点循环卷积, 即 $\mathbf{r}_u = \text{IDFT}\{\text{DFT}\{\mathbf{s}_u\} \text{DFT}\{\mathbf{h}\}\}$, 计算可得 $\mathbf{r}_u [20, 14, 20, 26, 32]$ 。

当 ZP 长度不满足式(4)时, 例如 $N_c = 1$ 时, $\mathbf{s} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 0]$, $\mathbf{r} = [3, 8, 14, 20, 26, 32, 17]$, $\mathbf{r}_u = [20, 8, 14, 20, 26, 32]$ 。但是 \mathbf{s}_u 和 \mathbf{h} 的 N_u 点循环卷积的结果 $[20, 8, 14, 20, 26, 32]$ 和 \mathbf{r}_u 不同, 说明发生了 ISI。由此也验证了式(4)。

5 结语

“数字信号处理”课程通常只介绍线性卷积与

循环卷积的等价关系的理论部分, 并未涉及它的实际应用, 由于比较抽象, 学生掌握时具有一定难度。本文通过结合水声通信中的 ZP-OFDM 系统介绍线性卷积与循环卷积的等价关系, 理论联合实际, 不但可以进一步加深学生对两种卷积关系等基础知识与重要概念的理解, 还可以拓展学生的专业知识面, 在实际教学中已获得较好反响。

参考文献:

- [1] 吴镇扬. 数字信号处理 [M]. 第 3 版, 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [2] 王大伦. 数字信号处理 [M]. 第 1 版, 北京: 清华大学出版社, 2014.
- [3] 胡广书. 数字信号处理导论 [M]. 第 2 版, 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [4] 程佩青. 数字信号处理教程 [M]. 第 4 版, 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [5] C. Qi, L. Wu and X. Wang. Underwater Acoustic Channel Estimation via Complex Homotopy [C], in Proc. IEEE International Conference on Communications (ICC), pp. 3821-3825, Ottawa, June 2012.

(上接第 19 页王 融等文)

随着我国高等教育国际化步伐的进一步加快, 该教学模式也会进一步改进和完善, 并希望所获得的经验能为其他课程的教学提供一定参考。

参考文献:

- [1] 王焰新. “一带一路”战略引领高等教育国际化 [J]. 北京: 留学生, 2016(4): 30-31.
- [2] 侯卫周, 敖天勇. 基于电路课程的横拓展与纵延伸衔接的教学模式研究—以电子信息类学科为例 [J]. 北京: 中国教育技术装备, 2016(10): 11-13.
- [3] 方宝, 武毅英. 高等教育来华留学生的变化趋势研究—基于近十五年统计数据分析 [J]. 武汉: 高等教育研究, 2016(2): 19-30.
- [4] 郑刚, 刘金生. “一带一路”战略中教育交流与合作的困境及对策 [J]. 北京: 比较教育研究, 2016, 38(2): 20-26.
- [5] 马佳妮. 来华留学生就读感知形成路径及积极感知提升策略 [J]. 北京: 中国高教研究, 2017(2): 37-41.